OM ALGEBRAISKE OG IKKE-ALGEBRAISKE FLADER.

AF

C. JUEL.

DET nittende Aarhundredes Geometri har væsentlig holdt sig til algebraiske Kurver, Flader og Korrespondentser. Dette er dog ikke at forstaa i streng Forstand. Infinitesimalgeometrien er jo endog udviklet i høj Grad, og dens Forudsætninger er jo saa at sige overalt videre end de, der begrænses af algebraiske Betingelser.

Derimod er der en anden Side ved de algebraiske Dannelsers Theori, som synes uadskilleligt knyttet til algebraiske Ligningers Grader, nemlig de Sætninger, som angiver Antallet af Løsninger paa visse Opgaver. Skøndt det Emne, jeg i det følgende skal gaa ind paa, ikke direkte giver Bidrag i denne Retning, hænger det dog saa nøje sammen dermed, at jeg er nødt til at begynde dermed.

Mine Undersøgelser herom gaar langt tilbage og har til Udgangspunkt Bestemmelsen af Formerne af hvad jeg dengang kaldte grafiske Kurver af 3die og 4de Orden. Ved en Kurves Orden (Realitetsorden) forstaar jeg det højeste og tillige opnaaelige Antal af Skæringspunkter mellem Kurven og en ret Linie. I Definitionen medoptages den Fordring, at en ret Linie, der har flere Punkter fælles med Kurven end dens Orden angiver, med alle sine Punkter hører med til Kurven; denne Fordring er opfyldt af sig selv, naar Kurven forudsættes analytisk og overalt regulær; at dette Kurvebegreb dog er videre end det egentlig algebraiske, følger af, at en Kurve af en bestemt Realitetsorden algebraisk kan være af en vilkaarlig høj Orden. Hvad den ovennævnte Formbestemmelse af Kurverne af 3die og 4de Orden angaar, kan man dog nøjes med langt snevrere Betingelser end den, at Kurven skal være analytisk, men jeg skal ikke gaa ind derpaa.

Foruden de plane Kurver har jeg ogsaa betragtet Rumkurver definerede paa en lignende Maade. I den senere Tid er jeg gaaet ind paa en analog Behandling af Flader efter jeg ved den skandinaviske Matematikerkongres i Stockholm 1909 havde fremsat mine første Forsøg i den Retning.

Jeg har særlig undersøgt Fladerne af 3die Orden og fundet, at den sædvanlige og velkendte Theori for rette Linier beliggende paa en algebraisk Flade af tredie Orden ogsaa er gyldig for enhver analytisk Flade af denne Orden. I det følgende vil jeg gaa ud fra denne Sætning, idet jeg dog kun benytter den for det Tilfælde, at Fladen er analytisk og overalt regulær. Som Eksempel kan nævnes en Flade med Ligningen $xy = z^5 + z^3 + 1$.

Den Opgave, jeg her skal ind paa, er den at finde de reelle Skæringspunktsbetingelser, man endnu skal føje til de ovennævnte, for at Fladen skal blive en algebraisk Flade af 3die Orden.

Man kan sige, at man herigennem faar en ny Vej, ad hvilken man systematisk kunde komme til Theorien for algebraiske Flader i hvert Fald af de lavere Ordener. En saadan Theori er hidtil opstillet ad to Veje dels ad en ren geometrisk dels ad analytisk-geometrisk Vej. Disse Metoder er væsentlig ens, selv om det endnu ikke er lykkedes at lade dem gaa ganske parallelt med hinanden. Algebraiske Polynomier af højere Orden danner man nemlig af dem af lavere Orden ved sukcessive Additioner og Multiplikationer, og det er i Virkeligheden det samme, man gør, naar man definerer Flader og Kurver af højere Orden som geometrisk Sted for Skæringspunkterne mellem tilsvarende Elementer i projektive Bundter eller Næt.

Efter den Fremgangsmaade, jeg her henstiller som en Mulighed, bærer man sig helt anderledes ad, idet man dog derved begrænser sig til reelle Flader. Man begynder med Flader af en bestemt Realitetsorden, af en mere eller mindre almindelig Beskaffenhed, siger saa meget man kan om den, og tilføjer dernæst indskrænkende Betingelser, saa at Fladen bliver algebraisk.

For Flader af anden Orden vil man saaledes begynde med en vilkaarlig lukket og kontinuert Flade, der har højest to Punkter fælles med en ret Linie. Om en saadan Flade kan der allerede siges en hel Del; jeg kan henvise til Prof. *Bruun*: »Über Ovale und Eiflächen«. Tilføjer man dernæst den Betingelse, at Fladen skal indeholde alle Punkter af én ret Linie, maa Fladen nødvendigvis være en algebraisk vindskæv Flade af anden Orden.

Den almindelige algebraiske Kurve af 2den Orden kan dernæst defineres som Slutningslinien mellem den nævnte vindskæve Flade og en Plan. Om denne Definition stemmer med den sædvanlige, kan naturligvis kun afgøres, naar man i Forvejen kender saadanne Kurver, altsaa i Forvejen véd, at den f. Eks. er bestemt med 5 vilkaarlige Punkter eller lignende.

Dernæst kan man definere den almindelige algebraiske Flade af anden Orden som den Flade, der af en vilkaarlig Plan skærer en algebraisk Kurve af anden Orden.

Naar man nu vil gaa over til Flader af tredie Orden, vil man atter begynde med den almindeligste lukkede kontinuerte Flade, hvis Realitetsorden er 3. Om denne kan man sige noget, men ganske vist i dette Øjeblik ikke meget. Tilføjer man den Begrænsning, at Fladen skal være analytisk og overalt regulær, er det endnu ikke nødvendig, at Fladen er en algebraisk Flade af 3die Orden. Om denne Flade kan man allerede opstille en Theori om de paa Fladen liggende rette Linier. *Men tilføjer man nu yderligere den Skæringspunktsbestemmelse, at Fladen af et Keglesnit højest skal skæres i 6 Punkter (medmindre da Keglesnittet helt ligger paa Fladen), maa denne i Almindelighed være algebraisk.*

De Undtagelsestilfælde, som nødsager mig til at sige »i Almindelighed« er de, hvor enten Fladen er vindskæv eller hvor den kun indeholder saadanne rette Linier, langs hvilke den berøres af en og samme Plan ɔ: hvor alle rette Linier paa Fladen giver udfoldelige Elementer.

Vi gaar altsaa i Henhold til vor postulerede Theori for de paa Pladen liggende rette Linier ud fra, at der findes en Plan, der skærer Fladen G^3 i tre adskilte rette Linier a, b og c. Gennem a lægges en Plan π, der skærer G^3 foruden i a i en Oval ω. Planen kan altid vælges saaledes, at ω skærer a i to Punkter; ellers vilde nemlig a slet ikke ligge paa Fladen. Hvis ω ikke skulde være en elliptisk Oval d. v. s. ligge helt i det endelige, kan dette altid opnaas ved en reel Kollineation, der lader a blive liggende. Vi kan dernæst lægge et Keglesnit K, der gaar gennem 5 Punkter af ω, hvoraf de to ligger paa den ene Side og de tre andre paa den anden Side af ω. Ifald K nu er en Ellipse eller en Parabel, vil den skære a i to Punkter, altsaa Fladen i flere end 6 Punkter; ω maa derfor falde sammen med K. Men det samme maa ogsaa være Tilfældet, ifald K skulde være en Hyperbel. Dette er nemlig i hvert Fald Tilfældet, naar de 5 Punkter ligger paa samme Hyperbelgren. Men de *maa* ligge paa

samme Gren, thi naar en elliptisk Oval skærer begge Grenene af en Hyperbel, kan der hverken være flere eller færre end 4 Skæringspunkter. Ifald der nemlig var flere, maatte der nødvendigvis findes Fællestangenter. En Tangent m til Hyperblen kan imidlertid umuligt ogsaa være Tangent til Ovalen, thi da denne ligger helt i det endelige, maa alle Ovalens Punkter ligge paa en og samme Side af m, medens Hyperblens to Grene ligger paa hver sin Side af m.

Vi har altsaa set, at en vilkaarlig Plan, der berører Fladen i et Punkt af a, maa skære i et Keglesnit. Gennnm a gaar nu efter Forudsætningerne en Plan μ_1, der skærer i 3 rette Linier a, b og c. En Plan α gennem a, der ligger nær ved μ_1, maa være en Plan, der skærer i et Keglesnit, thi μ_1 skærer i de to rette Linier b og c, der skærer a. Det gør intet til Sagen, om de tre rette Linier gaar gennem samme Punkt; i saa Fald bliver μ_1 en Grænsestilling for Planer, der har (reelle) Røringspunkter med Fladen. Vælges et passende Punkt P paa α i Nærheden af μ_1, vil ligeledes Planerne (Pb) og (Pc) skære G^3 i Keglesnit henh. β og γ. Punkt P er valgt passende nær ved μ_1, naar en Plan f. Eks. gennem b ved at drejes ud fra Stillingen μ_1 til (bP) ikke har overskredet en fra μ_1 forskellig Stilling, hvor Planens Snit i Fladen skærer b i to sammenfaldende Punkter. Gennem de tre Keglesnit α, β, γ og Linierne a, b, c gaar to algebraiske Flader af 3die Orden, den ene dannet af de tre Planer (Pa), (Pb) og (Pc), den andet dannet af Planen μ_1 i Forbindelse med den Keglesnitsflade, der gaar gennem α, β, γ; disse sidste har nemlig parvis to Punkter fælles. Man vælger nu et Punkt Q paa den givne Flade G^3, der atter ligger i Nærheden af μ_1, men ikke ligger paa α, β eller γ. Der findes da en enkelt aldeles bestemt Flade i det af de to ovennævnte bestemte Bundt, der gaar gennem Q. Denne algebraiske Flade F^3 maa falde sammen med den givne G^3. Lad os nemlig betragte Bundtet af de Planer μ, der gaar gennem a og endnu skærer G^3 i Ovaler, der har to Punkter fælles med a. En saadan *kontinuert* Samling af Planer μ har man i hvert Fald, naar man medtager μ_1 i Samlingen (eventuelt som en Grænsestilling). Alle de nævnte Planer skærer G^3 i Keglesnit, og disse maa falde sammen med de Keglesnit, hvori Planerne skærer F^3. For det første maa nemlig det Keglesnit γ_1, hvori Planen (Qc) skærer G^3 ogsaa ligge paa F^3, da det har 5 Punkter fælles med F^3: Punktet Q og de Punkter, hvori Planen skærer α og β. Dernæst maa en vilkaarlig Plan μ skære F^3 og G^3 i samme Keglesnit, da disse har de 6 Punkter fælles, hvori μ skære β, γ og γ_1. Fladerne G^3 og F^3 har altsaa et sammenhængende kontinuert Flade-

stykke fælles og de maa derfor falde helt sammen, da de begge er analytiske og overalt regulære (med eventuel Undtagelse af diskret liggende Punkter).

Man kan dernæst definere plane Snit i den konstruerede algebraiske Flade som almindelige plane Kurver af 3die Orden, og endelig den almindelige algebraiske Flade af 3die Orden som den, hvis plane Snit er de nævnte Kurver. Om man vil, kan man jo endnu medtage plane Kurver af fjerde Orden og definere dem som Konturen af Projektionen af en algebraisk Flade af tredie Orden fra et Punkt af selve Fladen. At dette virkelig er den almindelige plane algebraiske Kurve af fjerde Orden i sædvanlig Forstand, kan man naturligvis kun bevise, naar man i Forvejen ved, hvad man vil forstaa ved en saadan Kurve[1]). Dernæst kan den almindelige Flade af fjerde Orden defineres som den Flade, der af en vilkaarlig Plan skærer i en Kurve af fjerde Orden.

Jeg skal endnu omtale et andet Eksempel paa en lignende Definition nemlig af de anallagmatiske Flader. En saadan defineres i de algebraiske Fladers Theori som en algebraisk Flade af fjerde Orden, der har den uendelige fjerne Kuglecirkel til Dobbeltkurve. Men ogsaa den kan defineres ved først at gaa ud fra en analytisk med Undtagelse af diskret liggende Punkter overalt regulær Flade og tilføje en passende Antalsbestemmelse. En saadan, som man i hvert Fald kunde forsøge, har man deri, at en vilkaarlig Cirkel skærer Fladen algebraisk talt i fire Punkter, en Egenskab, disse Flader ganske vist deler med Keglesnitsfladerne.

Jeg er oprindelig kommen ind paa denne Opfattelse ved at søge at udvide mine Undersøgelser over plane cykliske Kurver[2]), der af enhver reel Cirkel skærer i højest 4 reelle Punkter, til Rummet. Det nævnte Sted viste jeg, at der existerer analytiske men ikke algebraiske cykliske plane Kurver. Det er tilstrækkeligt som Eksempel at nævne en ydre Parallelkurve til en Ellipse. For Rummet viser det sig nu, at Sagen stiller sig anderledes.

Lad os tage en analytisk Flade, om hvilken vi forudsætter, at den af enhver reel Cirkel skærer i højest 4 Punkter — medmindre da Cirklen ligger helt paa Fladen — og lad os invertere denne Flade om et Punkt P af selve Fladen som Inversionscentrum. Man maa da faa en analytisk Flade G^3, der maa være af 3die Orden. Denne vil

---

[1]) Selve den angivne Sætning er bevist f. Eks. af *Geisér* (Mathematiske Ann. Bd. 1).

[2]) Kgl. D. Vidensk. Selsk. Skrifter 7. Række, Ntv. og M. Afd. VIII. 6. (1911).

indeholde den uendelig fjerne rette Linie u beliggende i den oprindelige Flades Tangentplan i Punktet P. Gennem u vil der efter den her forudsatte Theori for Flader af tredie Orden gaa mindst én Plan, der skærer Fladen G^3 i tre rette Linier, af hvilke dog to eller ogsaa alle tre kan falde sammen. Nu kan imidlertid selve Linien u, som man let sér, ikke være dobbelt paa den nysnævnte Maade, medmindre P er valgt som et Kuglepunkt, hvad vi kan antage ikke at være Tilfældet. Om den oprindelige cykliske Flade véd vi derfor (ved Inversion), at der gennem P gaar to Cirkler paa Fladen, der enten er adskilte eller sammenfaldende. I det sidste Tilfælde har Beviset for den Sætning, vi vil udvikle, ingen Gyldighed. Vi vil derfor i det følgende forudsætte, at der ikke gennem P gaar nogen cirkulær Krumningslinie — medmindre der da tillige gennem P gaar andre adskilte Cirkler paa Fladen; her maa man erindre, at P kan vælges som et vilkaarligt Punkt paa Fladen.

Vi vil nu holde os til den cykliske Flade G^3 af 3die Orden. Paa denne findes to adskilte Linier a og b beliggende i en Plan μ_1, hvis uendelig fjerne rette Linie ligeledes ligger paa Fladen.

Man kan dernæst let vise, at enhver gennem a gaaende Plan μ, der ligger nær ved μ_1, foruden i a vil skære Fladen i en Cirkel α. (En Plan μ siges at ligge nær ved μ_1, naar man kan dreje en Plan fra Stillingen μ_1 til Stillingen μ_1 uden at overskride Tangentplanen i et parabolsk Punkt). Selve Planen μ_1 skærer foruden i a i en udartet Cirkel dannet af Linien b og den uendelig fjerne rette Linie u. Planen μ vil derfor foruden i a i hvert Fald skære i en Oval, der har to Punkter fælles med a. Vælges nu paa Ovalen tre Punkter, der ikke alle ligger paa samme Side af a, vil en Cirkel gennem disse 3 Punkter skære a i 2 Punkter og Fladen altsaa i mindst 5 Punkter; Cirklen maa derfor ligge paa Fladen. Paa samme Maade ser man, at enhver Plan μ' gennem b, der er nær ved μ_1, vil skære Fladen i en Cirkel β. Skæringslinien s mellem Planen for en Cirkel α og Planen for en Cirkel β ligger lige saa nær, man selv vil, ved Planen μ_1, og denne gaar gennem et Røringspunkt (ab) mellem Fladen og denne Plan. Linien s vil derfor skære Fladen i to reelle Punkter foruden i (ab), hvoraf følger, at en Cirkel α maa skære enhver Cirkel β indenfor et vist kontinuert Omraade for α og β.

Vælges nu tre faste Cirkler β i dette Omraade, kan man gaa ud fra, at ikke to af disse har to Punkter fælles, thi i saa Fald vilde en Kugle være en Del af cykliske Flade; denne maatte da bestaa af en Kugle og en Plan. Udelukkes dette Tilfælde, ser man let, at Be-

tingelsen for at uendelig mange Cirkler α skærer de 3 Cirkler β — hvis Planer alle gaar gennem en i det *endelige* liggende ret Linie b — er den, at Cirklerne β skærer b i 3 involutoriske Punktpar. Men da vil en enkelt uendelig Samling af Cirkler α skære de 3 Cirkler β, og ved denne algebraisk bestemte Bevægelse bestemmes en algebraisk Flade. Denne maa imidlertid falde sammen med den givne, da de to analytiske med Undtagelse af diskrete Punkter overalt regulære Flader har et endeligt Fladestykke fælles.

Vi har altsaa bevist:

En reel analytisk med eventuel Undtagelse af diskret liggende Punkter overalt regulær Flade, der af enhver reel Cirkel højst skærer i 4 reelle Punkter maa nødvendigvis være algebraisk, saafremt den ikke har cirkulære Krumningslinier.

Om Sætningen ogsaa skulde være gyldig i det nævnte Undtagelsestilfælde, der jo indbefatter Omdrejningsflader og de deraf ved Inversion udledede, kan jeg ikke sige bestemt i dette Øjeblik.

Der er dog et Tilfælde, hvor Sætningen er almengyldig, nemlig *naar Fladen har to reelle Dobbeltpunkter.*

Forbindes nemlig disse to Punkter med et vilkaarligt Punkt af Fladen ved en Cirkel, har denne 5 Punkter fælles med Fladen og maa derfor ligge helt i denne. Inverterer man nu om det ene af Dobbeltpunkterne som Inversionscentrum, faar man en saadan Kegle med Toppunkt i det andet Dobbeltpunkts inverse Punkt, som af enhver reel Cirkel højest skærer i 4 Punkter. Men en saadan Kegle maa være en Keglesnitskegle, da den ogsaa af ethvert reelt Keglesnit højest vil kunne skæres i 4 reelle Punkter (med mindre Keglesnittet ligger paa Keglen). Dette følger deraf, at enhver reel Keglesnitskegle altid har reelle cirkulære Snit.

Vi har i det ovenstaaende med den nævnte Undtagelse bevist, at cykliske Flader maa være algebraiske forsaavidt de er analytiske og regulære. Men naturligvis eksisterer ikke-analytiske cykliske Flader. Man kan saaledes let konstruere en Oval dannet af 4 Cirkelbuer og sørge for, at den faar en Symmetriakse. Drejer man denne Oval om Aksen, faar man en Flade, som man let kan bevise højest kan have 4 Punkter fælles med enhver Cirkel, der ikke har uendelig mange Punkter fælles med Fladen. Denne er en afdelingsvis analytisk, men er i sin Helhed en ikke-analytisk cyklisk Flade.